సులభంగా అర్థమయ్యే కీలకమైన అధ్యాయం!

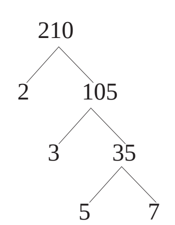
వాస్తవ సంఖ్యలు

పదో తరగతి పబ్లిక్ పరీక్షల్లో వాస్తవ సంఖ్యలు ప్రధానమైన అధ్యాయం. సాధారణ విద్యార్థులు కూడా దీన్ని సులభంగా అర్థం చేసుకోవచ్చు. పరీక్షలో ఈ అధ్యాయం నుంచి 1 మార్కు ప్రశ్న-ఒకటి, 2 మార్కుల ప్రశ్న-ఒకటి, 4 మార్కుల ప్రశ్న-ఒకటి.. మొత్తం 7 మార్కులకు ప్రశ్నలు అడిగే అవకాశం ఉంది.

ఈ అధ్యాయంలో వాస్తవ సంఖ్యలు, సంవర్గమానాలు అనే రెండు భాగాలున్నాయి. అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం, అంతమయ్యే దశాంశం, అంతంకాని ఆవర్తనం చెందే దశాంశం, కరణీయ సంఖ్యలు, సంవర్గమాన న్యాయాలు కీలకమైనవి.

అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం: ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధానాంకాల లబ్ధంగా రాయవచ్చు. ప్రధాన కారణాంకాల క్రమం ఏదైనప్పటికీ ఈ కారణాంకాల లబ్ధం ఏకైకం.

ఉదా: $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$



అంతమయ్యే దశాంశం – అంతంకాని ఆవర్తనం చెందే దశాంశం

అకరణీయ సంఖ్య

$x = \frac{p}{q}$, $q = 2^n.5^m$ (n, m రుణేతర పూర్ణసంఖ్యలు) రూపంలో రాయగలిగితే x దశాంశ రూపం ఒక అంతమయ్యే దశాంశం. $q = 2^n.5^m$ రూపంలో రాయలేకపోతే x దశాంశ రూపం ఒక అంతంకాని ఆవర్తనం చెందే దశాంశం అవుతుంది. దీని విపర్యయం కూడా నిజమే.

కరణీయ సంఖ్యలు: p, qలు పూర్ణసంఖ్యలు, $q \neq 0$ అయితే $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయలేని వాస్తవ సంఖ్యలను కరణీయ సంఖ్యలు (Q') అంటారు.

ఉదా: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \Pi, 0.101101110...$

- p ప్రధాన సంఖ్య అయితే $\sqrt{p}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య.
- ఒక అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యల మొత్తం లేదా భేదం కరణీయ సంఖ్య.
- ఒక శూన్యేతర అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం, భాగఫలం కూడా కరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.
- రెండు కరణీయ సంఖ్యల మొత్తం, లబ్ధం ఎల్లప్పుడూ కరణీయ సంఖ్య కాకపోవచ్చు.

సంవర్గమానం: a, x లు ధన పూర్ణ సంఖ్యలు, $a \neq 1$ అయితే $a^n = x \Rightarrow \log_a{}^x = n$ ను సంవర్గమాన రూపంగా నిర్వచిస్తాం.

ఉదా: ఘాత రూపం $2^5 = 32$.

సంవర్గమాన రూపం $\log_2 32 = 5$

సంవర్గమాన న్యాయాలు:

i) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

ii) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

iii) $\log_a x^m = m.\log_a x$

మాదిరి ప్రశ్నలు

1. ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధ పద్ధతిలో 72, 108ల క.సా.గు., గ.సా.కా.లను కనుగొనండి.

సాధన: 72, 108లను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాస్తే..

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

$108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^3$

72, 108ల క.సా.గు. = అంకెల అన్ని కారణాంకాల గరిష్ఠ ఘాతాల లబ్ధం = $2^3 \times 3^3 = 216$.

72, 108ల గ.సా.కా. = అంకెల సామాన్య (ఉమ్మడి) కారణాంకాల కనిష్ఠ ఘాతాల లబ్ధం = $2^2 \times 3^2 = 36$

2. n ఒక సహజ సంఖ్య అయితే 6^n సంఖ్య '0'తో అంతమవుతుందో, లేదో సరిచూడండి.

సాధన: ఇచ్చిన సంఖ్య $6^n = (2 \times 3)^n$

6^n సంఖ్య '0'తో అంతమవ్వాలంటే 6^n సంఖ్య ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంలో 5 ఒక ప్రధాన సంఖ్య కావాలి. కానీ ఇది సాధ్యం కాదు. ఎందుకంటే 6^n ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంలో 2, 3లు మాత్రమే ఉన్నాయి.

$\therefore$ n ఏ సహజ సంఖ్య విలువకైనా 6^n సంఖ్య '0'తో అంతం కాదు.

3. $(17 \times 11 \times 2) + (17 \times 11 \times 5)$ అనేది ఒక సంయుక్త సంఖ్య అని ఏవిధంగా నిరూపిస్తావు?

సాధన: $(17 \times 11 \times 2) + (17 \times 11 \times 5) = 17 \times 11(2+5) = 17 \times 11 \times 7$. ఇచ్చిన సంఖ్యను $17 \times 11 \times 7$ ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధంగా రాయవచ్చు. కాబట్టి అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం ప్రకారం ఇచ్చిన సంఖ్య ఒక సంయుక్త సంఖ్య.

4. భాగాహారం చేయకుండా కింది అకరణీయ సంఖ్యలు అంతమయ్యే దశాంశాలో, అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశాలో తెలపండి.

i) $\frac{189}{125}$ ii) $\frac{77}{210}$

సాధన: i) $\frac{189}{125} = \frac{189}{5^3}$ ($\because 125 = 5 \times 5 \times 5$)

ఇక్కడ $q = 5^3 = 2^0 \times 5^3$ అనేది $2^n.5^m$ ($n = 0$, $m = 3$) రూపంలో ఉంది. కాబట్టి

$\frac{189}{125}$ అంతమయ్యే దశాంశం.

ii) $\frac{77}{210} = \frac{7 \times 11}{7 \times 30} = \frac{11}{30} = \frac{11}{2 \times 3 \times 5}$

ఇక్కడ $q = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$ అనేది $2^n.5^m$ రూపంలో లేదు. కాబట్టి

$\frac{77}{210}$ అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశం.

5. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను భాగహారం చేయకుండా దశాంశ రూపంలో రాయండి.

i) $\frac{143}{110}$ ii) $\frac{23}{40}$

సాధన: i) $\frac{143}{110} = \frac{11 \times 13}{11 \times 10} = \frac{13}{10} = 1.3$

ii) $\frac{23}{40} = \frac{23}{2^3 \times 5^1}$ ($\because 40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$)

$= \frac{23}{2^3 \times 5^1} \times \frac{5^2}{5^2} = \frac{23 \times 25}{2^3 \times 5^3}$

$= \frac{575}{(2 \times 5)^3} = \frac{575}{10^3} = \frac{575}{1000}$

$= 0.575$

6. $\sqrt{3}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని చూపండి.

సాధన: దత్త ప్రవచనాన్ని 'విరోధాభాసం' ద్వారా నిరూపించాలి.

$\sqrt{3}$ ను అకరణీయ సంఖ్య అనుకుంటే..

అప్పుడు $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ అయ్యేట్లు a, bలు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు, a, b లు పూర్ణ సంఖ్యలు అవుతాయి.

($\because$ అకరణీయ సంఖ్య నిర్వచనం)

$\sqrt{3} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{3}\,b = a$

$3b^2 = a^2$ ($\because$ఇరువైపులా వర్గం చేయగా) .... (1)

$a^2 = 3b^2$ కాబట్టి a^2ను 3 నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.

a^2ను 3 నిశ్శేషంగా భాగిస్తే aను 3 నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.

($\because$ p ప్రధాన సంఖ్య, a ధనపూర్ణసంఖ్య అయితే a^2ను p నిశ్శేషంగా భాగిస్తే aను p నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది).

aను 3 నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది కాబట్టి a = 3 అయ్యేవిధంగా c అనే పూర్ణసంఖ్యను రాయవచ్చు.

$a = 3c$ ను సమీకరణం (1)లో రాస్తే..

$3b^2 = (3c)^2 \Rightarrow 3b^2 = 9c^2$

$\Rightarrow b^2 = 3c^2$

$b^2 = 3c^2$ కాబట్టి b^2ను 3 నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.

b^2ను 3 నిశ్శేషంగా భాగిస్తే bను 3 నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది. అంటే a, bలను 3 నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.

$\Rightarrow$ a, bలకు 3 ఉమ్మడి కారణాంకం.

$\Rightarrow$ ఇది a, bలు పరస్పర ప్రధానాంకాలు అనే ధర్మానికి విరుద్ధం.

$\therefore \sqrt{3}$ అకరణీయసంఖ్య అనేది అసత్యం.

$\therefore \sqrt{3}$ కరణీయ సంఖ్య.

7. $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

సాధన: దత్త ప్రవచనం '$\sqrt{3}+\sqrt{5}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య'ను విరోధాభాసం ద్వారా నిరూపించాలి.

$\sqrt{3}+\sqrt{5}$ అకరణీయసంఖ్య అనుకుంటే...

అప్పుడు $\sqrt{3}+\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ అయ్యేవిధంగా a, bలు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు, a, bలు పూర్ణసంఖ్యలుగా ఉంటాయి.

$\sqrt{3}+\sqrt{5} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a}{b} - \sqrt{5}$

$\Rightarrow 3 = \frac{a^2}{b^2} + 5 - 2\frac{a}{b}\sqrt{5}$

($\because$ ఇరువైపులా వర్గం చేయగా)

$\frac{2a}{b}\sqrt{5} = \frac{a^2}{b^2} + 5 - 3 = \frac{a^2}{b^2} + 2 = \frac{a^2 + 2b^2}{b^2}$

$\sqrt{5} = \frac{a^2 + 2b^2}{b^2} . \frac{b}{2a} = \frac{a^2 + 2b^2}{2ab}$

a, b లు పూర్ణసంఖ్యలు కాబట్టి $\frac{a^2 + 2b^2}{2ab}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అయితే $\sqrt{5}$ అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. ఇది విరుద్ధం.

కాబట్టి $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ అకరణీయ సంఖ్య అనుకుంటే అసత్యం.

$\therefore \sqrt{3}+\sqrt{5}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య.

8. $\log \frac{128}{625}$ ను విస్తరించండి.

సాధన: $\log \frac{128}{625} = \log 128 - \log 625$

$\left(\because \log \frac{x}{y} = \log x - \log y\right)$

$= \log 2^7 - \log 5^4$

$\left(\because \log 2^7 = 128, 5^4 = 625\right)$

$= 7\log 2 - 4\log 5$

$\left(\because \log x^m = m \log x\right)$

9. $\log 10 + 2 \log 3 - \log 2$ ను ఒకే సంవర్గమానంగా రాయండి.

సాధన: $\log 10 + 2 \log 3 - \log 2$

$= \log 10 + \log 3^2 - \log 2$

$\left(\because \log x^m = m \log x\right)$

$= \log 10 + \log 9 - \log 2$

$= \log (10 \times 9) - \log 2$

$(\because \log xy = \log x + \log y)$

$= \log 90 - \log 2 = \log 90/2$

$\left(\because \log \frac{x}{y} = \log x - \log y\right)$

$= \log 45$

10. $3^x = 5^{x-2}$ ను సాధించండి.

సాధన: $3^x = 5^{x-2}$

ఇరువైపులా 10 భూమిగా ఉన్న సంవర్గమానాన్ని తీసుకుంటే ..

$\log_{10} 3^x = \log_{10} 5^{x-2}$

$x. \log_{10}{}^3 = (x-2) \log_{10} 5$

$\Rightarrow x. \log_{10}{}^3 = x. \log_{10}{}^5 - 2\log_{10} 5$

$x. \log_{10}{}^5 - x. \log_{10}{}^3 = 2\log_{10}{}^5$

$x(\log_{10}{}^5 - \log_{10}{}^3) = 2\log_{10} 5$

$x = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 5 - \log_{10} 3}$

11. $x^2+y^2 = 25xy$ అయితే $2\log(x+y) = 2\log 3 + \log x + \log y$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $x^2+y^2 = 25xy$

ఇరువైపులా 2xy కలిపితే..

$x^2+y^2 + 2xy = 25xy+2xy$

$\Rightarrow (x+y)^2 = 27xy$

$\Rightarrow \log (x+y)^2 = \log 27xy$

$\Rightarrow 2\log(x+y)$

$= \log 27 + \log x + \log y$

$\left(\because \log xy = \log x + \log y, \log x^m = m \log x\right)$

$\Rightarrow 2\log(x+y)$

$= \log 3^3 + \log x + \log y$

$2\log(x+y)$

$= 3\log 3 + \log x + \log y$

గతంలో అడిగిన ప్రశ్నలు

1. 72, 108ల క.సా.గు., గ.సా.కా.లను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధ పద్ధతిలో కనుగొనండి. ***(మార్చి 2015, ఏపీ)***

2. log15 ను విస్తరించండి. ***(మార్చి 2015, ఏపీ)***

3. $\sqrt{5}$ కరణీయ సంఖ్య అని విరోధాభాసం పద్ధతి ద్వారా నిరూపించండి. ***(మార్చి 2015, ఏపీ)***

4. అకరణీయ సంఖ్య $\frac{229}{400}$ ను దశాంశ రూపంలో రాసి ఇది అంతమయ్యే దశాంశమో, అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశమో తెలపండి. ***(జూన్ 2015, ఏపీ)***

5. $x^2+y^2 = 6xy$ అయితే $2\log(x+y) = \log x+\log y+3\log 2$ అని చూపండి. ***(జూన్ 2015, ఏపీ)***

6. $\frac{a+b}{2}$ సూత్రాన్ని ఉపయోగించకుండా $\frac{3}{4}$, 1 మధ్య ఉండే నాలుగు అకరణీయ సంఖ్యలను రాయండి. ***(మార్చి 2015, టీఎస్)***

7. ఏవైనా రెండంకెలు ఉన్న మూడు సంఖ్యలను రాయండి. 'ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధ పద్ధతి ద్వారా ఆ సంఖ్యలకు క.సా.గు., గ.సా.కా.లను కనుగొనండి. ***(మార్చి 2015, టీఎస్)***

8. కిందివాటిలో ప్రతిదానికీ ఒక ఉదాహరణ రాయండి. ***(మార్చి 2015, టీఎస్)***

i) రెండు కరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం ఒక అకరణీయ సంఖ్య

ii) రెండు కరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం ఒక కరణీయ సంఖ్య.

9. $3+2\sqrt{5}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి. ***(మార్చి 2015, టీఎస్)***

10. 36కు ఉండే ప్రధాన కారణాంకాల సంఖ్య? ***(మార్చి 2015, టీఎస్)***

11. $\log_{10} 0.001 = -3$ ఘాతాంక రూపం? ***(మార్చి 2015, టీఎస్)***

12. x, y లు రెండు ప్రధాన సంఖ్యలైతే వాటి గ.సా.కా. = ——— ***(జూన్ 2015, ఏపీ)***

13. $\log_x \sqrt{x}$ = ——— ***(జూన్ 2015, ఏపీ)***

14. 729 ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం = — ***(జూన్ 2015, ఏపీ)***